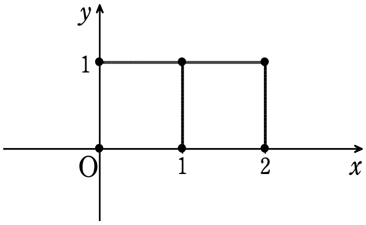
確率と漸化式の問題

問題 xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点Xは、これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。

規則：動点 X は、そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに、等しい確率で移動する。



たとえば、X が $(2,\ 0)$ にいるときは、$(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$ のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。

また、X が $(1,\ 1)$ にいるときは、$(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$ のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O}=(0,\ 0)$ から出発するとき、n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。［2016年，京都大学・理系］

解答 n 秒後に X の x 座標が 0，1，2 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n (ただし，$p_0=1$，$q_0=0$，$r_0=0$) とする。

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が 0 であるのは，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　n 秒後に X の x 座標が 0 で，次の 1 秒で y 軸方向に移動するとき

[2]　n 秒後に X の x 座標が 1 で，次の 1 秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が 1 であるのは，次の [3]，[4]，[5] の場合である。

[3]　n 秒後に X の x 座標が 0 で，次の 1 秒で x 軸方向に 1 移動するとき

[4]　n 秒後に X の x 座標が 1 で，次の 1 秒で y 軸方向に移動するとき

[5]　n 秒後に X の x 座標が 2 で，次の 1 秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が 2 であるのは，次の [6]，[7] の場合である。

[6]　n 秒後に X の x 座標が 1 で，次の 1 秒で x 軸方向に 1 移動するとき

[7]　n 秒後に X の x 座標が 2 で，次の 1 秒で y 軸方向に移動するとき

よって

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}r_n \quad \cdots\cdots ②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}r_n \quad \cdots\cdots ③$$

$p_n+q_n+r_n=1$ であるから，② から

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+r_n)+\frac{1}{3}q_n=\frac{1}{2}(1-q_n)+\frac{1}{3}q_n=-\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{2} \iff q_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(q_n-\frac{3}{7}\right)$$

$q_0-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}$ から，$q_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$，　よって $q_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$ ……(＊)

$p_n+r_n=1-q_n$ であるから　$p_n+r_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ …… ④

①−③ から　$p_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n-r_n)$，$p_0-r_0=1$ から　$p_n-r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …… ⑤

$\dfrac{④+⑤}{2}$ によって，　求める確率 p_n は　$\underline{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{2}{7}}$　答

別解 **1**　解答 の ②を省き，q_n を求めることなく進めることもできる。

①−③　より，$p_{n+1}-r_{n+1}=\dfrac{1}{2}(p_n-r_n)$，$p_0=1$，$r_0=0$ で，　$p_n-r_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ……⑤

①+③で，$p_{n+1}+r_{n+1}=\dfrac{1}{2}(p_n+r_n)+\dfrac{2}{3}q_n=-\dfrac{1}{6}(p_n+r_n)+\dfrac{2}{3}$　$\langle\because q_n=1-(p_n+r_n)\rangle$

$p_{n+1}+r_{n+1}-\dfrac{4}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(p_n+r_n-\dfrac{4}{7}\right)$ より，$p_n+r_n=\dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{4}{7}$　……④　以下同じ

別解 **2**　（q_n を求めるところまでは，解答と同じとする）

$(*)$ の式を　①に代入する。

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad\cdots\cdots ⑥$$

α，β を定数として，

$$p_{n+1}+\alpha+\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{p_n+\alpha+\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

とおく。

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n\left\{1-2\left(-\frac{1}{6}\right)\right\} \quad\Longleftrightarrow$$

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n-\frac{1}{2}\alpha+\frac{2}{3}\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad\cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦を比較して，$-\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{2}{3}\beta=-\dfrac{1}{7}$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha=-\dfrac{2}{7}$，$\beta=-\dfrac{3}{14}$

よって，$p_{n+1}-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left\{p_n-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$ ……$(**)$

$\left\{p_n-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$ は，初項 $p_0-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

ゆえに，$p_n-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

したがって，$\underline{p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{2}{7}}$　答

解説　漸化式で確率を求める典型的な問題である。「n 回の試行後の確率」を求める問題では，漸化式による解法が主流となっている。この問題では，まず[1]~[7] の考察をしっかりおこなう必要がある。そして，①②③の漸化式を立てる。解答 は対称性を利用した解法となっている。別解1 は q_n を求めることなく，p_n と r_n の「和と差」に持ち込む方法であり，本質的には解答と同じである。　別解 2 は p_n のみに注目して，式変形で「隣接2項間漸化式」として「等比数列」型 $(**)$ にもち込む解法である。漸化式の解法も様々にあり，興味深いところだ。よく味わってほしい。この問題も，2023年9月15日・16日 の文化祭展示「難関大学数学講座の10年」のアンケートで，　”一番「なるほど」と思った問題”の第 1 位に選ばれた。「最大値の問題」と同点の首位であった。